数理解析研究所講究録
1090 巻 1999 年 131-142

Conditions invariantes sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles et problème de Cauchy

Jean VAILLANT

Dans ce résumé, nous voulons rappeler les conditions invariantes sur les systèmes que nous avons définies [16] [17] [18] [19] [20] et donner l'essentiel des méthodes qui permettent de montrer que ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans les classes de fonctions indéfiniment différentiables ou de Gevrey, lorsque l'opérateur est à multiplicité constante et sa partie principale est hyperbolique [16] [12] [20].

0. Notations

$x \in \Omega, \Omega$ voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}$; (les conditions peuvent aussi s'écrire dans le cas holomorphe que nous ne traiterons pas ici). h est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1, matriciel $m \times m$ à coefficients analytiques (les conditions pour un opérateur d'ordre t sont écrites dans [20] ; les démonstrations des théorèmes sont de même nature, mais un peu plus longues).

On note a la partie principale de l'opérateur, d'ordre 1 et b sa partie d'ordre 0, de sorte que : $h = a + b$. On note ξ la variable duale de x et on considère le determinant caractéristique : dét a (x,ξ) ; on peut décomposer det a en facteurs irréductibles dans $\mathcal{O}[\xi]$ anneau des polynômes en ξ à coefficients les germes de fonctions analytiques à l'origine ; pour simplifier les notations, nous supposerons qu'il n'y a qu'un facteur multiple H de multiplicité m_1 , de sorte que :

$$\det a = H^{m_1} K \quad ,$$

HK est un produit de facteurs irréductibles distincts.

Pour un opérateur différentiel ou pseudo-différentiel analytique classique (développable en symboles homogènes), matriciel ou scalaire $\Lambda'(x, D)$ d'ordre $\leq \mu$, on notera : $\Lambda(x, \xi) = \sigma_\mu(\Lambda')$ le symbole d'ordre μ égal à la partie principale de Λ' si celle-ci est d'ordre μ , à 0 sinon. Inversement à une matrice $\Lambda(x, \xi)$ de polynômes ou de symboles homogènes d'ordre μ , on associera des opérateurs matriciels notés $\Lambda'(x, D)$, de sorte que : $\sigma_\mu(\Lambda') = \Lambda$. On posera : s = degré de H , χ = degré de K . Ainsi on notera : $H'(x, D)$ tel que : $\sigma_s(H') = HI$, I matrice unité de dimension m et $K'(x, D)$ tel que : $\sigma_\chi(K') = KI$.

Nous nous proposons de définir des conditions sur l'opérateur h qui expriment son comportement relatif à H .

On note A la matrice des cofacteurs de a de sorte que :

$$a\,A = A a = \det a \;\; I = H^{m_1} K I \;.$$

On considère l'anneau localisé [16] de l'anneau $\mathcal{O}\,[\xi]$ par rapport à l'idéal premier défini par H ; c'est l'anneau des fractions construites à partir de $\mathcal{O}\,[\xi]$ et dont le dénominateur n'est pas divisible par H.

Cet anneau est principal et dans cet anneau a est équivalent à la matrice diagonale :

$$\operatorname{diag}\left[H^p \,,\, H^{q_1} ,\ldots, H^{q_\ell} \,,\, 1 \,,\ldots,\, 1\right] ,$$

où les entiers $p, q_1 ,\ldots, q_\ell$ sont tels que :

$$p \geq q_1 \geq \ldots \geq q_\ell > 0 \;\; ; \;\; p+q = m_1 \;\text{, où l'on a posé :}$$

$$q = q_1 + \ldots + q_\ell \;.$$

Définition 1 : On appelle type de l'opérateur la suite :

$$(p, q_1 ,\ldots, q_\ell) \;.$$

A est divisible par H^q dans $\mathcal{O}\,[\xi]$; on pose :

$$\mathcal{A} = \frac{A}{H^q} \;\text{, de sorte que :}$$

$$a\,\mathcal{A} = \mathcal{A}\;a = H^p\;KI \;.$$

On note $\gamma = s + \chi - 1$, $\mu_o = ps + \chi - 1 =$ degré de $\mathcal{A}$

$$\mu_j = \mu_o + j\,\gamma + \left(\sum_{1\leq k\leq j} q_k - j\right) s \quad \text{, pour : } 0 \leq j \leq \ell \;,$$

$$\mu_j = \mu_o + j\,\gamma + (q-\ell)\,s \;\;\text{, pour : } \ell+1 \leq j \;.$$

1. - Conditions L - On les définit par récurrence.

Condition L_1 - Il existe des opérateurs différentiels $\mathcal{A}'$, H', K' et un polynôme $\Lambda_1\,(x, \xi)$ homogène en ξ à coefficients matriciels, de degré μ_1 , ou nul tels que :

$$S_o \equiv \mathcal{A}\;\sigma_{\mu_o}\,(h\,\mathcal{A}' - H'^p\,K') = H^{p-q_1}\,\Lambda_1 \;.$$

On a alors :

$$a\,\Lambda_1 = H^{q_1}\, K\, \sigma_{\mu_o}\,(h\,\mathscr{A}' - H'^{p}\, K') \;\; .$$

On suppose L_1 réalisée, $\mathscr{A}'$, H', K' et Λ_1 choisis.

Condition $\mathbf{L_2}$: Il existe un opérateur différentiel Λ'_1 et un polynôme Λ_2 homogène en ξ de degré μ_2 ou nul, tels que :

$$S_1 \equiv \mathscr{A}\, \sigma_{\mu_1}\,(h\,\Lambda'_1 - h\,\mathscr{A}'\, H'^{q_1}\, K' + H'^{p}\, K'\, H'^{q_1}\, K') = H^{p-q_2}\,\Lambda_2$$

....

Condition $\mathbf{L_\ell}$: Il existe un opérateur différentiel $\Lambda'_{\ell-1}$ et un polynôme Λ_ℓ tels que :

$$S_{\ell-1} \equiv \mathscr{A}\, \sigma_{\mu_{\ell-1}}\,(h\,\Lambda'_{\ell-1} - h\,\Lambda'_{\ell-2}\, H'^{q_{\ell-1}}\, K' + \ldots$$

$$+ (-1)^{\ell-1}\, h\,\mathscr{A}'\, H'^{q_1}\, K'\, H'^{q_2}\, K' \ldots H'^{q_{\ell-1}}\, K'$$

$$+ (-1)^{\ell}\, H'^{p}\, K'\, H'^{q_1}\, K' \ldots H'^{q_{\ell-1}}\, K') = H^{p-q_\ell}\,\Lambda_\ell \;\; .$$

Condition $\mathbf{L_{\ell+1}}$: Il existe Λ'_ℓ et $\Lambda_{\ell+1}$ tels que :

$$S_\ell \equiv \mathscr{A}\, \sigma_{\mu_\ell}\,(h\,\Lambda'_\ell - h\,\Lambda'_{\ell-1}\, H'^{q_\ell}\, K' + \ldots + (-1)^{\ell}\, h\,\mathscr{A}'\, H'^{q_1}\, K' \ldots H'^{q_\ell}\, K'$$

$$+ (-1)^{\ell+1}\, H'^{p}\, K' \,.\, H'^{q_1}\, K' \ldots H'^{q_\ell}\, K') = H^{p-1}\,\Lambda_{\ell+1} \,.$$

....

Condition $\mathbf{L_{m'_1}}$: Il existe $\Lambda'_{m'_1-1}$ et $\Lambda_{m'_1}$ tels que :

$$S_{m'_1-1} \equiv \mathscr{A}\, \sigma_{\mu_{m'_1-1}}\,(h\;\Lambda'_{m'_1-1} - h\;\Lambda'_{m'_1-2}\; H'\, K' + \ldots$$

$$+ (-1)^{m'_1-1}\, h\,\mathscr{A}'\, H'^{q_1}\, K' \ldots H'^{q_\ell}\;\; K'\, (H'\, K')^{m'_1-\ell-1}$$

$$+ (-1)^{m'_1}\, H'^{p}\;\; K'\, H'^{q_1}\, K' \ldots H'^{q_\ell}\, K'\, (H'\, K)^{m'_1-\ell-1}$$

$$= H^{p-1}\,\Lambda'_{m'_1}$$

Définition 2 : m_1' est le plus petit entier tel que toutes les conditions $L_{m_1''}$, $m_1'' > m_1'$ soient des conséquences de $L_1 ,..., L_{m_1'}$.

Remarque : les conditions L sont évidemment invariantes.

Proposition 1 - Les conditions L ne dépendent pas du choix des opérateurs H', K', $\mathcal{A}'$,..., $\Lambda'_{m_1'-1}$.

Conséquence - On peut les écrire explicitement à l'aide des coefficients de h .

2. - Hypothèse d'hyperbolicité de multiplicité constante.

On suppose que <u>HK est strictement hyperbolique</u> par rapport à un champ de vecteurs que l'on peut prendre de valeur : (1, 0 ,..., 0) ; les coordonnées de x sont : $x = (x_o,x') = (x_o, x_1 ,..., x_n)$; $\xi = (\xi_o, \xi') = (\xi_o, \xi_1 ,..., \xi_n)$; l'hypothèse exprime que :

$$HK\ (x, \xi_o, \xi') = 0$$

a $s + \chi$ zéros distincts en ξ_o, $\forall x$, $\xi' \neq 0$; les hyperplans : $x_o = \underline{x_o}$ ne sont caractéristiques en aucun point.

3. On a résumé [12] [20] dans chaque cas de multiplicité ≤ 5 les calculs qui montrent l'existence de m_1' , voir aussi le cas général : $p = m_1$ dans [16], le cas général (p, 1,..., 1) dans [13].

Les conditions L s'expriment par l'annulation de $N\ (m_1')$ germes à l'origine de fonctions analytiques.

Définition 3 : On note $\mathcal{N} = \mathcal{N}\ (m_1, p, \ell)$ l'ensemble des points (n_1, n_2) de coordonnées entières du quart de plan $(\mathbb{R}^+)^2$, tels que :

$$0 < n_1 \leq m_1\ ;\ 0 < n_2 \leq r\ ;\ p\, n_2 \leq (p-1)\, n_1\ .\ \text{On a posé : } r = m_1 - \ell - 1\ ;$$

On note $c = c\ (m_1, p, \ell)$ le nombre de ces points.

Proposition 2 - Pour $m_1 \leq 5$, $N\ (m_1') = c$.

4. - Remarques sur les conditions L

1) Si $p = q_1 = \ldots = q_\ell = 1$, les conditions L sont vides, l'opérateur est fortement hyperbolique [15] [1]

2) Si $p = q_1$, par exemple, la condition L_1 est vide et définit Λ_1 ; si $p \neq q_2$ la première condition sera donc L_2

3) Si $p = m_1$ les conditions sont étudiées en détail dans [16] (voir aussi [4] [6] [10])

4) Si le type est $(p, 1, \ldots, 1)$, les conditions sont étudiées dans [13]

5) Si $m_1 = p = 2$, les conditions L se réduisent à L_1 . Notons S la matrice sous caractéristique ([14], [1] par exemple) et $\{,\}$ le crochet de Poisson. L_1 équivaut à la condition suivante :

$$\mathrm{A.S.A.} + \frac{1}{2}\,\mathrm{A}\,.\,\{a, \mathrm{A}\}$$

est divisible par H .

Si $m_1 = 3$, $p = 2$, les conditions se réduisent à L_1 et L_2 , voir [1] pour des expressions de ces conditions à l'aide du sous caractéristique et de crochets de Poisson.

6) Dans le cas d'une matrice d'opérateurs d'ordre t , si $m = 1$, (cas scalaire), les conditions L équivalent à la condition de bonne décomposition de l'opérateur.

5. - Théorème $(m_1 \leq 5)$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy soit localement bien posé est que les conditions L soient satisfaites.

6. Toutes les preuves utilisent d'abord une réduction microlocale de l'opérateur h que nous allons brièvement décrire.

a) $HK = (\xi_o - \lambda_1) \ldots (\xi_o - \lambda_s)\,(\xi_o - \lambda_{s+1}) \ldots (\xi_o - \lambda_{s+\chi})$.

Δ désigne un opérateur pseudodifférentiel analytique d'ordre 0 elliptique dans un voisinage conique. Par conjugaison par Δ, (c'est-à-dire en considérant $\Delta^{-1} h \Delta$), h est réduit microlocalement, modulo un opérateur d'ordre $-\infty$, à la forme :

$$\operatorname{diag}\left[\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_j, \dots, \tilde{h}_s, \dots, \tilde{h}_{s+\chi}\right] \quad ,$$

où : $\tilde{h}_j$ est une matrice $m_1 \times m_1$, $\tilde{h}_{s+\chi'}$ est scalaire [16]

$$\tilde{h}_j = \tilde{a}_j + \tilde{b}_j \quad ; \quad j \le s$$

$$\tilde{a}_j = \left[D_o - \lambda_j (x, D')\right] I + \tilde{\mathrm{a}}_j (x, D') ,$$

$$\left[\tilde{\mathrm{a}}_j (x, \xi')\right]^p = 0 \quad ; \quad \det \tilde{a}_j (x, \xi') = \left[\xi_o - \lambda_j (x, \xi')\right]^{m_1} .$$

$\tilde{b}_j$ est d'ordre 0 .

On montre que, dire que h vérifie les conditions L , équivaut à dire que les microlocalisés $\tilde{h}_j$ vérifient les conditions L correspondantes.

Nous omettrons (abusivement) de répéter les tildas et indices j et noterons $\tilde{h}_j = h$

b) On utilise le théorème d'Egorov et h devient :

$$h = a (x, D) + b (x, D') \ ; \text{ matrice } m_1 \times m_1 \ ;$$

$$\det a (x, \xi) = \xi_o^{m_1} \quad ;$$

$$a (x,\xi) = I \xi_o + \mathrm{a} (x, \xi') \quad ; \quad \mathrm{a}^p = 0 \quad .$$

Les conditions L pour l'opérateur initial et l'opérateur transformé sont équivalentes.

c) a équivaut dans un anneau localisé naturel convenable, après les transformations, à :

$$\operatorname{diag}\left[\xi_o^p, \xi_o^{q_1}, \dots, \xi_o^{q_\ell}, 1, \dots, 1\right] \quad ;$$

$q = q_1 + \dots + q_\ell$; ξ_o^q est la plus haute puissance de ξ_o qui divise $A (x, \xi_o, \xi')$; $A = \xi_o^q \mathcal{A}$. Il peut exister des points (x, ξ') tels que : $\mathcal{A} (x, 0, \xi') = 0$; en ces points le rang varie ; plus généralement, on a le même phénomène pour les mineurs d'ordre m–2, m–3 ,... ; on dira que le rang généralisé peut varier. En dehors d'une surface analytique en (x, ξ') : Σ_1 , le rang généralisé [16] est constant et le type de l'opérateur, pour chaque (x, ξ') est encore $(p, q_1, \dots, q_\ell)$.

Dans ces conditions, on peut effectuer une réduction supplémentaire [10] [16] [6] et, sans changer de notation, on a finalement :

$$h\,(x.D) = I\,D_0 + J\,|D'| + b\,(x.D')\ ;$$

$$J = \mathrm{diag}\,[J_p, J_{q_1}, \dots, J_{q_\ell}]\ ;$$

$$J_{q_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots\dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice de Jordan de dimension q_k ; b a la forme normale d'Arnold.

Les conditions L sont invariantes dans cette réduction.

7. 1ère méthode de preuve [20]

Pour obtenir que les conditions L sont suffisantes pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans $\mathfrak{C}^\infty$, on construit des paramétrixes microlocales de la forme :

$$\int e^{ix'.\eta'}\left[Y_0\,(x,\eta') + \dots + Y_k\,(x,\eta')\right]\hat{u}\,(\underline{x_0}, \eta')\,d\eta'\ ,$$

$\underline{x_0}$ valeur initiale, le $\wedge$ est la transformation de Fourier par rapport aux variables y'. Les conditions L permettent d'obtenir des développements non triviaux et en revenant à l'opérateur initial de vérifier les données de Cauchy, par un calcul de déterminant de Vandermonde. On utilise aussi les utiles remarques de [6] [7] [8] pour prolonger les majorations obtenues en dehors de Σ_1 et d'un ensemble Σ_2 analogue.

Pour obtenir la condition nécessaire, on utilise comme usuellement le théorème du graphe fermé et on construit des développements asymptotiques de la forme :

$$\exp\left[i\,\omega\,\delta x'.\eta' + \dots + \omega^{1/d}\,\psi_{1j}\right]\sum_k Y_k\,(x)\,\omega^{-k/d'}\ ;\ d, d' \in \mathbb{Q}^+,\ k \in \mathbb{N}$$

en bref on procède par l'absurde ; si une condition L_j n'est pas vérifié, on peut calculer un développement non trivial et le théorème du graphe fermé n'est pas vérifié.

Cette méthode directe a été vérifiée jusqu'à m_1=7 et détaillée dans [20] jusqu'à m_1=5. Elle a l'avantage de donner aussi des résultats dans les classes de Gevrey, comme nous l'expliquerons dans la suite ; elle met en évidence la dualité "algébrique" entre les conditions L et les développements asymptotiques.

8. - 2ème méthode de preuve [12]

Matsumoto [6] a défini des opérateurs elliptiques de changement d'ordre M de symbole :

$$\mathrm{diag}\left[|\xi'|^{\sigma},\ldots,|\xi'|^{\sigma},1,\ldots,1\right],\sigma\in\mathbb{Z}\ .$$

Par de tels opérateurs, on peut réduire l'opérateur microlocal h au type $(m_1, 0, \ldots, 0)$, c'est-à-dire :

$$h = I\,D_o + J_{m_1}\,|D'| + b\ (x, D')\ ;$$

J est la forme de JORDAN de dimension m_1.. Par [12], on montre que, si l'opérateur initial h est de type $p, q_1, \ldots, q_\ell$, son transformé $\tilde{h}$ par conjugaisons par des opérateurs M est de type $(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_\ell)$, les conditions L pour l'opérateur h sont équivalentes aux conditions L pour l'opérateur transformé. En ordonnant les types $(p, q_1, \ldots, q_\ell)$, on peut donc se ramener aux conditions du cas $(m_1, \ldots, 0)$ pour lequel les résultats sont connus.

Cette méthode a été utilisée pour $m_1 \leq 5$ et aussi dans le cas $[p, 1, \ldots, 1]$, [13] .

9. Pour démontrer la condition suffisante, dans l'optique de se rapprocher du cas scalaire, on peut aussi diagonaliser l'opérateur et montrer que si les conditions L sont vérifiées, l'opérateur diagonalisé est bien décomposable.

Plus précisément soit h sous la forme microlocale :

$$h = a + b = I\,D_o + \mathsf{a} + b\ ;$$

$$\det a = \xi_o^{m_1}\ ;$$

le type de h est : $(p, q_1, \ldots, q_\ell)$; $A = \xi_o^q\,\mathcal{A}$.

On cherche un opérateur Q tel que :

(1) $$h \circ Q = I D_o^{m_1} + \ell_1\,D_o^{m_1-1} + \ldots + \ell_{m_1}\ ;$$

où les opérateurs ℓ sont pseudo différentiels d'ordre 0 . On choisit, en fait, la partie principale de Q de la forme :

$$\mathcal{L}\,\xi_0^q \quad .$$

Les conditions L permettent de choisir les opérateurs ℓ et les termes d'ordre inférieur de Q de sorte que la formule 9.1 soit vérifiée. On peut alors construire une paramétrixe de h o Q et par suite de h .

10. Dans le paragraphe 3, nous avons défini le diagramme $\mathcal{N}$ dont le nombre de points c est égal au nombre de conditions scalaires indépendantes L .

On ordonne les demi-droites δ_d passant par 0 et contenant un point du diagramme par la décroissance de leur pente notée 1/d .

Exemple [20] : $m_1= 5$, p=3 ; $q_1=2$; on a donc : $\ell=1$; r=2 ; c=8 ; les demi-droites ont pour pente : 2/3, 3/5, 1/2, 2/5, 1/3, 1/4 et 1/5 . d prend les valeurs : 3/2, 5/3, 2, 5/2, 3, 4, 5 . De façon générale, d prend les valeurs :

$$\left(d_1 ,\ldots, d_k ,\ldots, d_g\right) .$$

A chaque ensemble $(d_1 ,\ldots, d_k)$ on associe un ensemble de conditions invariantes noté $(LG)_{d_k}$.

$(LG)_{3/2}$: L_1 n'est pas vérifiée ;

$(LG)_{5/3}$: L_1 est vérifiée, L_{21} n'est pas vérifiée où L_{21} exprime que $S_1 = H\,\Lambda_1$.

Remarque : Dans le cas d'un opérateur scalaire, ces conditions correspondent à l'indice d'irrégularité de [2] [5]

11. On obtient les théorèmes [20] $m_1 \leq 5$.

Théorème 1 : Le problème de Cauchy est localement bien posé dans la classe de Gevrey $\gamma^{d'}$ pour :

$$1 < d' \leq \frac{p}{p-1} \quad .$$

Théorème 2 : Nous rappelons seulement le type (3,2).

Le problème de Cauchy est bien posé dans la classe : $\gamma^{d'}$, d' ≤ d

(a) Si L_1 est vérifiée, $d = \frac{5}{3}$

(b) Si L_1 et L_{21} sont vérifiées, d = 2

(c) Si L_1 et L_2 sont vérifiées et si L_{12} ne l'est pas, $d = \frac{5}{2}$

(d) Si (L_{12} n'est pas vérifiée et si L_1, L_2 et $L_{(4)2}$ sont vérifiées) ou (L_{12} et L_3 sont vérifiées), d = 3

(e) Si (L_{12} n'est pas vérifiée L_1, L_2 et L_3 sont vérifiées) ou (L_{12}, L_3 et L_4 sont vérifiées), d = 4

(f) Si (L_{12} n'est pas vérifiée L_1, L_2, L_3 et L_4 sont vérifiées) ou (L_{12}, L_3, L_4 et L_6 sont vérifiées), d = 5

(g) Si les conditions L sont vérifiées, d est quelconque.

12. La preuve utilise des développements de symboles analogues aux développements asymptotiques utilisés dans la condition nécessaire au paragraphe 7. Plus précisément on a des paramétrixes de la forme

$$\int e^{ix'\eta' + \psi(x,\eta')} \left[Y_o (x, \eta') + \ldots + Y_k (x,\eta') + \ldots\right] \hat{u} (\underline{x_o}, \eta') \, d\eta' \ .$$

ψ est une somme finie de symboles d'ordre fractionnaire ; l'ordre de ψ est $\frac{1}{d}$; les Y_k sont des symboles fractionnaires d'ordre décroissant.

Bibliogaphie

[1] Robert Berzin et Jean Vaillant, Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples, J. Math. Pures et Appl. **58** (1979), n° 2, 165-216.

[2] De Paris, (J.-C.) and Wagschal (C.), Problème de Cauchy non caractéristique à données Gevrey ..., J. Math. Pures et Appliquées **57** (1978), 157-172.

[3] Y. Hamada, J. Leray, et C. Wagschal, Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle, J. Math. Pures et Appl. **55** (1976), n° 3, 297-352.

[4] Kunihiko Kajitani, Cauchy problem for non strictly hyperbolic systems, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. **15** (1979), n° 2, 519-550.

[5] Hikosaburo Komatsu, Irregularity of hyperbolic operators, Hyperbolic equations and related topics (Kataka/Kyoto, 1984), Académie Press, Boston, MA, (1986), pp. 155-179.

[6] Waichiro Matsumoto, Normal form of systems of partial differential and pseudo-differential operators in formal symbol classes and applications, J. Math. Kyoto Univ. **34** (1994), n° 1, 15-40.

[7] Waichiro Matsumoto and Hideo Yamahara, On the Cauchy-Kowaleskaya theorem for systems, Proc. Japan Acad., Ser. A Math. Sci. **67** (1991), n° 6, 181-185.

[8] Masatake Miyake, On Cauchy-Kowalevsky's theorem for general systems, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. **15** (1979), n° 2, 315-337.

[9] Tatsuo Nishitani, On the Lax-Mizohata theorem in the analytic and Gevrey classes, J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), n° 3, 509-521.

[10] Vesselin M. Petkov, Microlocal forms for hyperbolic systems, Math. Nachr. **93** (1979), 117-131.

[11] Vesselin M. Petkov, The parametrix of the Cauchy problem for nonsymmetrisable hyperbolic systems with characteristics of constant multiplicity, Trans. Moscow Math. Soc. **37** (1980), n° 1, 1-47.

[12] Giovanni Taglialatela et Jean Vaillant, Conditions invariantes d'hyperbolicité des systèmes et réduction des systèmes, Bull. Sc. Math. 2ème série **120** (1996), 19-97.

[13] Giovanni Taglialatela, Conditions d'hyperbolicité pour les opérateurs matriciels à caractéristiques de multiplicité constante. Bolletino U.M.I. 7.11.B (1997) p. 917-959.

[14] Vaillant (J.), Données de Cauchy portées par une caractéristique double, dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles, rôle des bicaractéristiques, J. Math. Pures et Appliquées **47** (1968), n° 9, 1-40.

[15] Vaillant (J.), Remarques sur les systèmes fortement hyperboliques, J. Math. Pures et Appliquées **50** (1971), 25-51.

[16] Jean Vaillant, Conditions d'hyperbolicité des systèmes d'opérateurs aux dérivées partielles, Bull. Sc. Math. 2ème série **114** (1990), 243-328.

[17] Jean Vaillant, Conditions d'hyperbolicité des systèmes, C.R. Acad. Sc. Paris **313**, (1991), n° 5, 227-230.

[18] Vaillant (J.), Systèmes d'équations aux dérivées partielles et classes de Gevrey, C.R. Acad. Sc. Paris **320** (1995), 1469-1474.

[19] Jean Vaillant, Analytic hperbolic systems, Workshop on General Theory of Partial Differential Equations and Microlocal Analysis (Luigi Rodino, ed.), Pitnam Research Notes, (1996), 4-15 September 1995, Trieste, pp. 209-229.

[20] Jean Vaillant, Invariants des systèmes d'opérateurs différentiels et sommes formelles asymptotiques. A paraître au Japanese Journal of Mathematic.

[21] Jean Vaillant, Diagonalisation et décomposition d'un système, en préparation.

Vaillant Jean

Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

UFR 920 - UMR 9994

Mathématiques, Boîte courrier 172

Tour 46-0, 5ème étage,

4, place Jussieu - 75252 PARIS CEDEX 05